Ook het Hilbert hotel kan te klein zijn

Jean Paul Van Bendegem

Men mag rustig aannemen dat zo goed als alle wiskundigen vertrouwd zijn met het verhaal van het Hilbert hotel. Dit verhaal doet nog altijd schitterend dienst om te laten zie hoe contra-intuïtief het aftelbaar oneindige is, maar dat tegelijkertijd het perfect mogelijk is om "zindelijk" na te denken over datzelfde oneindige. Doorgaans wordt het verhaal in de volgende stadia verteld:

Je hebt een hotel met een oneindig aftelbaar aantal kamers 1, 2, 3, …, n, … Bij de receptie beschikt men over de mogelijkheid om gelijktijdig naar alle kamers een bericht te sturen. In de startsituatie is elke kamer door een persoon bezet.

Scenario 1: Eén gast dient zich aan en vraagt voor een kamer. Dit wordt opgelost door naar iedereen het bericht te sturen om te willen verhuizen van kamer n naar kamer n+1. Kamer 1 komt daardoor vrij en het hotel is opnieuw vol.
Scenario 2: k gasten dienen zich aan (met k eindig). Dit is even eenvoudig op te lossen: de receptie stuurt het bericht naar iedereen om van kamer n naar kamer n+k te verhuizen. De eerste k kamers komen vrij en het hotel is wederom vol.
Scenario 3: Een oneindig aftelbaar gasten dient zich aan. Geen probleem, iedereen in het hotel verhuist van kamer n naar kamer 2n, waardoor alle oneven kamers vrij komen en het probleem is opgelost. Het hotel is en blijft vol.

Bij de ware enthousiastelingen komt er nog een stap bij:

Scenario 4: Er dient zich nu een oneindig aftelbare rij van oneindig aftelbare groepen aan. Ook dit probleem is oplosbaar. Iedereen die reeds in het hotel aanwezig is verhuist van kamer n naar kamer 2^n. De eerste groep neemt alle kamers met nummers 3^n, de tweede groep alle kamers met nummers 5^n, en, in het algemeen, de j-de groep komt terecht in de kamers met nummers p_j^n, waarbij p_j het j-de oneven priemgetal is. Bemerk dat met deze strategie nog oneindig veel kamers leeg blijven nadat iedereen een plek gevonden heeft.

(Voor de geïnteresseerde lezer: is er een scenario denkbaar zodanig dat alle kamers op het einde toch weer gevuld zijn? Ad Meskens, waarvoor dank, heeft mij een eenvoudige methode aan de hand gedaan op basis van de functie die wordt gebruikt om de breuken één-één-duidig af te beelden op natuurlijke getallen.)

In mathematische termen vormen scenario's 1 en 2 een illustratie van de uitspraak $\aleph_0 + k = \aleph_0$ (k eindig), scenario 3 van $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ en scenario 4 van $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

Zoals gezegd dit alles is meer dan bekend, maar vaak moet men vaststellen dat de lezer of toehoorder die door het verhaal "gepakt" wordt snel in de overtuiging verkeert dat zo goed als alles in het hotel mogelijk is. Daarom loont het de moeite, denk ik, om (voor zover mij bekend) nieuwe scenario's te bedenken die aan de ene kant de grenzen laten zien van het Hilbert hotel en die aan de andere kant een nieuw hotel introduceren waar die grenzen kunnen overschreden worden. Dit nieuwe hotel draagt de toepasselijke naam het Paradijs hotel. De naam is uiteraard afgeleid van de beroemde uitspraak van Hilbert dat niemand ons zou verjagen uit het paradijs dan Cantor ons geschonken heeft (terug te vinden in zijn tekst *Ueber das Unendliche* uit 1926).

Ziehier **scenario 5**.

Het vertrekpunt is voor de aardigheid een leeg hotel met een aftelbaar oneindig aantal kamers 1, 2, 3, … Een firma met een aftelbaar oneindig aantal kaderleden (K_1, K_2, K_3, …) reserveert het hotel voor het weekend met de bedoeling om te vergaderen. De firma in kwestie is echter nogal aan de speciale kant en zij willen niet alleen plenair kunnen vergaderen, maar bovendien willen ze voorzien dat elke mogelijke denkbare vergadering kan plaatshebben. Dus willen kaderleden K_7, K_{1278} en $K_{23454963}$ samen vergaderen zonder de anderen, dan moet dat kunnen. Willen alle kaderleden K_{2n}, een aftelbaar oneindig aantal dus, samenkomen dan moet dat ook kunnen. Om geen tijd te verliezen vraagt de directie aan het hotel dat voor elke mogelijke vergadering een kamer zou voorzien worden. Willen onze drie kaderleden of alle "even" kaderleden samen vergaderen, dan moet de receptie meteen kunnen zeggen: u heeft kamer zoveel ter beschikking voor uw vergadering. Het hotel is onvoorzichtig en aanvaardt de opdracht.

De receptie roept alle stafleden samen die de opdracht krijgen om alle kamers af te lopen en op elke deur een samenstelling te hangen van een mogelijke vergadering en hiervan een lijst op te stellen bedoeld voor de receptie. Na een zekere tijd – de duur van deze opdracht laten we best in het ongewisse – is de klus geklaard en ligt er een lijst op de desk bij de receptie. Niemand heeft door dat er een vergissing moet gebeurd zijn want de lijst in kwestie kan onmogelijk bestaan zoals in het weekend op een rechtstreekse en voor de hoteldirectie pijnlijke manier werd aangetoond.

Vrijdagavond komen de kaderleden aan. Wat door de firma in kwestie handig gezien is, is dat ieder kaderlid ook zijn of haar eigen kamer heeft vermits ieder kaderlid op zich ook een "vergadering" vormt (wat best aannemelijk is, een bezinningsmoment is nooit weg). Vanaf zaterdagochtend beginnen de verschillende vergaderingen. De afspraak is dat ieder kaderlid naar de receptie kan komen om te vragen om kaderleden K_i, K_j, … op te roepen voor een vergadering apart en uiteraard om van de receptie te horen in welke kamer die vergadering zal doorgaan. Het wordt dus een danig heen en weer geloop tussen de verschillende kamers en de receptie, maar alles blijkt goed te lopen. Tot zondagochtend.

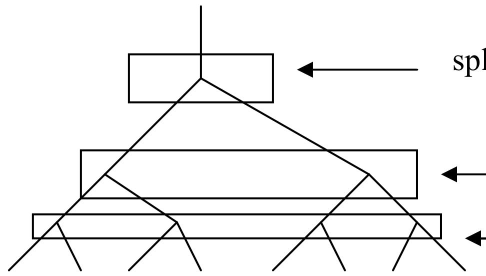
Op zondagochtend komt een kaderlid naar de balie en vraagt om de volgende vergadering bijeen te roepen, de zogenaamde *alternatieve vergadering*. Een kaderlid K_n moet deel uitmaken van de alternatieve vergadering indien K_n niet voorkomt in de samenstelling van de vergadering die voor kamer n voorzien was. Komt K_n wel voor in die samenstelling, dan mag die geen deel uitmaken van de alternatieve vergadering. Voor de receptie is dit geen gigantisch moeilijk probleem, daarvoor hebben ze de lijst ter beschikking. Dus na de reeds vermelde zekere tijd is de compositie van de alternatieve vergadering klaar en uiteraard vraagt het organiserende kaderlid naar welke kamer ze zich moeten begeven.

Grote verrassing: de receptie moet vaststellen dat er geen kamer voorzien is voor deze vergadering. Het kaderlid maakt zich kwaad en vraagt waarom, om maar iets te zeggen, kamer 576 niet beschikbaar is. Waarop de receptionist zijn lijst nakijkt en opmerkt dat kaderlid K_{576} geen deel uitmaakt van de alternatieve vergadering en dat de enige reden daarvoor is dat kaderlid K_{576} blijkbaar deel uitmaakt van de vergadering die voor kamer 576 al voorzien was. Dus kunnen ze daar niet vergaderen. Het kaderlid probeert nog eens met kamer 7656445, maar helaas kaderlid $K_{7656445}$ staat wél op de lijst van de nieuwe vergadering en de reden daarvoor was dat hij niet voorkwam op de lijst van leden voor de reeds geplande vergadering in kamer 7656445. Dat kan dus ook niet. De receptie realiseert zich dat de staf zich moet vergist hebben en dat de lijst die zij hebben opgesteld onvolledig is. Voor een keer heeft het hotel geen kamers genoeg. Blijkbaar kan ook een Hilbert hotel te klein zijn.

Uiteraard heeft het weinig zin om *scenario 1* toe te passen. Dan komt kamer 1 wel vrij, maar dan kan er een nieuwe alternatieve vergadering (met de nieuwe kamerverdeling) bijeengeroepen worden en aan dat spelletje komt geen eind. Maar kaderleden zijn inventief en al snel rijst de vraag of er geen hotel kan gebouwd worden dat wél alle mogelijke vergaderingen kan ontvangen. Na, jawel, een zekere tijd wordt er, geloof het of niet, een oplossing gevonden.

Ziehier **scenario 6**, het Paradijs hotel.

Om de werking van het Paradijs hotel te begrijpen zijn niet alleen de kamers belangrijk, maar ook de gangen die naar de kamers leiden. Je komt binnen bij de receptie en je deelt mee naar welke vergadering je moet. Stel je moet naar de vergadering bestaande uit K_7 (jijzelf), K_{100} en $K_{5423564}$. Dan doe je het volgende. Net voorbij de receptie is er een gang die splitst (zie figuur 1). De splitsing is gemarkeerd S_1. Neem de linkse gang. Wat verder splitst de gang opnieuw met markering S_2. Hier neem je ook links. Als je aan de zevende splitsing S_7 komt, dan neem je rechts. Bij alle volgende splitsingen ga je weer links tot aan S_{100}, daar ga je naar rechts. Links aanhouden tot aan $S_{5423564}$, daar ga je rechts en vervolgens tot helemaal "op het eind" blijf je links lopen. Aan het "eind" van de gang bevindt zich een kamer. Dat is de kamer die je moet hebben. Het is duidelijk dat jouw twee collega's precies dezelfde weg zullen afleggen en in dezelfde kamer zullen terechtkomen en uiteraard niemand anders.



figuur 1: het gangenpatroon van het Paradijs hotel
(bemerk dat S_2 betrekking heeft op alle splitsingen op dat niveau)

Wat er wiskundig aan de hand is is zeer eenvoudig. Een willekeurige vergadering kan voorgesteld worden door een oneindig aftelbare rij $r = \{r_i\}$ zodanig dat $r_i = 0$ als kaderlid K_i niet in de vergadering zit en $r_i = 1$ indien wel. Lees nu "links" voor 0 en "rechts" voor 1, dan stelt de volledige gang die naar de kamer leidt deze rij voor. Het aantal kamers in het hotel is wel degelijk overaftelbaar vermits het aantal aftelbare rijen met elementen gelijk aan 0 of 1 overaftelbaar is.

Net zoals het Hilbert hotel heeft het Paradijs hotel ook (hoe zou het anders kunnen?) een aantal merkwaardige eigenschappen. Ik presenteer ze opnieuw in de vorm van scenario's.

Scenario 7 of het probleem van de tweede firma.

Voor het Paradijs hotel hebben we gelijkaardige fenomenen wat betreft het opvangen van nieuwe gasten. Neem aan dat het hotel volledig gereserveerd is voor één bepaalde firma. Een tweede firma dient zich niettemin aan met dezelfde bedoeling, zij willen dus ook alle mogelijke vergaderingen kunnen voorzien. Voor de receptie is dit werkelijk geen enkel probleem. Het volstaat om aan elke vergadering van de reeds aanwezige firma te vragen of ze aan het begin van hun instructies "links" willen toevoegen en alle splitsingen ééntje opschuiven. Dit heeft voor gevolg dat alle vergaderingen van de eerste firma starten met de linkergang bij S_1, zodat alle kamers die op het einde liggen van een route die begint met rechts bij S_1 nu vrij komen voor firma twee.

Dit stemt mathematisch gesproken overeen met $c + c = c$, waarbij c de kardinaliteit van het continuum is (wat de kardinaliteit is van het aantal rijen met een aftelbaar aantal elementen gelijk aan 0 of 1).

Scenario 8 of het probleem van de grote verbroedering.

De twee firma's die in het hotel zitten komen met een eerder ongewoon verzoek naar de receptie. Omdat blijkt dat er voldoende kaderleden zijn van de twee firma's, die elkaar blijken te kennen, wordt er met de gedachte gespeeld om te fusioneren. Met hun eigen manier van werken betekent dit dat ze graag het hotel zo zouden willen herschikken dat alle mogelijke *gecombineerde* vergaderingen kunnen plaatshebben. Net zoals het voorgaande probleem is ook dit eenvoudig op te lossen. Stel dat K_i de kaderleden van firma één zijn en L_j de kaderleden van firma twee. Voor de gecombineerde vergadering worden alle kaderleden herbenoemd tot kaderleden M_k van de gefusioneerde firma en wel zodanig dat elk kaderlid K_i in het nieuwe bedrijf kaderlid M_{2i} wordt en elk kaderlid L_j M_{2j-1} wordt. Vervolgens krijgt de samengestelde groep M_k de gewone instructies mee.

Wat hier wordt geïllustreerd is dat $c \times c = c$, volgens een beproefde formule: hebben we twee reële getallen tussen 0 en 1 in binaire voorstelling – $0{,}r_1r_2 \ldots r_n \ldots$ en $0{,}q_1q_2 \ldots q_n \ldots$ - dan correspondeert met dit koppel één-éénduidig het reële getal $0{,}r_1q_1r_2q_2 \ldots r_nq_n \ldots$

Scenario 9 of de reductie van de gangen.

Na het succes met de twee firma's heeft de directie van het hotel ingezien dat er toch iets moet gedaan worden aan het onderhoud van het hotel. Het proper houden van zoveel gangen is een zeer kostelijke zaak, maar de zaak met de twee firma's heeft de directie precies overtuigd van het feit dat je eigenlijk met de helft van de gangen kunt toekomen. Met andere woorden aan splitsing S_1 is het genoeg om een bordje te zetten: "rechts afgesloten". Het volstaat de kaderleden te laten weten dat ze de splitsing moeten nemen die *volgt op* hun kadernummer. Maar – hoe kan het ook anders – iemand herinnert zich het Hilbert hotel en bedenkt dat de splitsingen zich eigenlijk gedragen als de kamers in dat klein hotelletje. Waarom dan niet om de andere splitsing een bordje gezet met de tekst "rechts afgesloten"? Waarom niet meteen alle splitsingen S_j afsluiten waarvoor j geen priemgetal is? Dan houd je alleen de priemsplitsingen over en die zijn als je maar "ver genoeg" gaat toch zeer dun gezaaid. Wat een besparing!

Dit scenario is geïnspireerd op de speciale Cantorverzameling die wordt gevormd door het interval [0,1] in drie te delen, het middelste deel weg te gooien en de procedure te herhalen op de overblijvende twee stukken *ad infinitum*. De verzameling die je bekomt is onvoorstelbaar "dun" – men spreekt soms van Cantor "stof" – maar de kardinaliteit is nog altijd die van het continuum. In het verhaal hierboven is de procedure iets complexer: deel het interval in twee, gooi één helft weg. Deel wat overblijft in twee en beschouw de twee stukken als twee nieuwe stukken. Herhaal de procedure *ad infinitum*.

Maar het wordt nog vreemder als we even kijken naar de instructies zelf, want daar is ook iets mee aan de hand.

Scenario 10 of het probleem van de routebeschrijving.

Het is evident dat welke groep zich ook aandient aan de receptie voor een vergadering, de receptionist steeds kan uitleggen hoe de kamer moet gevonden worden. Het volstaat om de kaderleden naar hun kaderlidnummer te vragen en te zeggen “Als jullie aan de splitsing S_i, S_j, … komen, ga dan allemaal naar rechts, zoniet houden jullie links”, waarbij de nummers van de splitsingen overeenstemmen met de nummers van de kaderleden. Maar als er een aftelbaar oneindig aantal mensen staat, dan kan dit omslachtig worden. Strikt genomen moet de receptionist een oneindig aantal splitsingen vermelden “Als jullie aan splitsing S_k (overeenstemmend met het nummer van één van de kaderleden) komen, ga dan allemaal rechts”. Maar in sommige gevallen kan het lukken dat de receptionist met één enkel (eindig) bericht iedereen kan toespreken zonder dat meer dan een eindig aantal kadernummers hoeven vermeld te worden. Het is zelfs denkbaar dat geen enkel kadernummer ter sprake hoeft te komen. Stel dat alle “even” kaderleden aan de receptie staan. Dan kan de receptionist simpelweg zeggen: “Iedereen aandacht alstublieft, de route om te volgen voor jullie allen is: links rechts links rechts enzovoorts”. Om tijd te sparen – in dergelijke hotels komt een oneindig geduld goed van pas – probeert de receptionist al op voorhand routebeschrijvingen compacter (= op een eindige manier) te beschrijven.

Grote verrassing: de receptionist moet vaststellen dat dit onmogelijk is. Er zullen altijd vergaderingen zijn waar hij niet anders kan dan één voor één alle splitsingen op te sommen. Een eenvoudig voorbeeld: stel dat een externe bezoeker aan de balie komt en vraagt naar de kamer waar de vergadering doorgaat van alle kaderleden met een even kadernummer 2n zodanig dat er twee priemgetallen bestaan p_1 en p_2 en $2n = p_1 + p_2$. Indien de receptionist een eindige beschrijving zou kunnen geven aan de bezoeker voor de te volgen route dan heeft hij hiermee het vermoeden van Goldbach opgelost. Maar zolang dat nog niet het geval is, zal hij zich moeten tevreden stellen met de oneindige beschrijving: “Bij elke oneven splitsing ga je links, bij elke even splitsing S_{2n} moet je nakijken of er twee priemgetallen zijn die aan de eis voldoen, is dat zo, ga rechts, is dat niet zo, ga links”.

Dit scenario is gebaseerd op de eenvoudige vaststelling dat alle eindige beschrijvingen hoogstens aftelbaar oneindig kunnen zijn, terwijl het totaal aantal routes naar de kamers overaftelbaar is. Het is dus zelfs zo dat voor de “meeste” routes geen compacte beschrijving kan gegeven worden. Let wel dat het bestaan van het Paradijs hotel de wiskunde enigszins overbodig zou maken indien we mogen aannemen dat de kaderleden bijzonder betrouwbare waarheidslievende mensen zijn. Want de bezoeker die de Goldbach-route heeft gevolgd en terugkomt aan de receptie zal weten of het vermoeden van Goldbach juist is of niet. Helaas zal hij aan ons niet meer kunnen zeggen dan een ja of een neen, want indien we aandringen zal hij ons een oneindige opsomming moeten geven of ons achterlaten met de enigmatische boodschap: “De zaak is heel simpel: bij elke even splitsing ben ik rechts gegaan”.

Is er een eind aan dit verhaal?

In geen geval is er een eind aan dit verhaal. Een hele nieuwe reeks mogelijkheden diende bekeken te worden toen één van de firma’s in kwestie op het idee kwam om de vergaderingen in de verschillende kamers de mogelijkheid te bieden om rechtstreeks met elkaar contact op te nemen om niet steeds de receptie te moeten lastigvallen. Dat bracht uiteraard het probleem met zich mee om de “nodige” telefoonlijnen te voorzien tussen alle kamers. De evidente vraag (voor de bestelbon) hoeveel exact? Dit was nog niet zo erg want het antwoord hierop is dat de zaak overaftelbaar is en meer precies dat het kardinaalgetal c is en blijft.

Maar iemand van de telefoonmaatschappij kwam uit op de volgende vraag. Noem een “toestand” een beschrijving van alle telefoonverbindingen die op een bepaald ogenblik in het hotel actief zijn (en dus automatisch een beschrijving van alle lijnen die stil zijn). Als je even abstractie maakt van het feit dat een kaderlid niet op twee vergaderingen gelijktijdig aanwezig kan zijn – wat zou er dan gebeuren trouwens? –, hoeveel toestanden zijn er dan? Bij het zoeken naar het antwoord op deze vraag werd de onderneming pas echt oneindig ingewikkeld.

Jean Paul Van Bendegem
Vrije Universiteit Brussel
Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie
(www.vub.ac.be/CLWF/)
Pleinlaan 2, 1050 Brussel
e-mail: jpvbende@vub.ac.be