Théorie analytique de la dialectique

Par Jean GORREN

AVANT-PROPOS

Le premier essai d'application de la logistique à la dialectique est le *Précis de Dialectique* (1936). Les notations sont celles du calcul proportionnel : p, q, r,... pour les propositions, p v q pour la somme logique et pq pour le produit logique. On dit que p implique q si p = pq. Cela signifie que si l'on affirme p, on affirme aussi q, mais on peut affirmer q sans affirmer p. L'idée exprimée par q a une plus grande extension que celle exprimée par p. On rappelle cette inégalité en écrivant p < q pour « p implique q ». C'est la notation de Couturat dans *L'Algèbre de la Logique.*

La méthode est celle du dialogue : si vous n'acceptez pas l'affirmation de p, vous dites « non », ce qui sous-entend non-p. On écrit np.

Une proposition peut être simplement énoncée. Mais si on affirme p dans le dialogue, on rejette par cela même np. Alors p < nnp. A partir de là, on établit les trois positions p, np, nnp, de la triade hégélienne. On obtient ainsi un calcul propositionnel trivalent qui contient, comme cas spécial, le système de Boole quand p = nnp. Ce qui importe, ce ne sont pas les valeurs absolues du vrai et du faux, mais les positions de l'affirmation et de la négation.

Ce point de vue ne dépasse pas les possibilités du calcul propositionnel. Après 1936, il nous a fallu une longue période de tâtonnements pour comprendre que les lois de la dialectique ne peuvent pas être extraites des termes du langage mais bien de l'analyse des faits abordés directement.

Le calcul logique de Boole, tel qu'il est exposé par Couturat, est susceptible de deux interprétations suivant que les éléments du calcul sont des concepts ou des propositions. Il fallait introduire une troisième interprétation dont les éléments sont des faits A, B, C ..., la somme logique A + B, un fait global, et le produit AB, une conjonction de faits. C'est dans l'implication que

se présentent les notions du calcul fréquentiel. On dit que A implique B si A = AB. Cela signifie qu'il suffit que A se produise pour que B se produise. Mais B peut se produire sans que A ne se produise. Le fait A n'est donc jamais plus fréquent que B et on rappelle cette inégalité en écrivant A < B pour « A implique B ». Il suffira donc de définir la fréquence f(X) d'un fait quelconque X pour en inférer que « A implique B » est une traduction de f(A) < f(B).

La définition de la fréquence est empruntée à la statistique. C'est la fréquence relative dans une suite de faits. Le fait global A + B est déterminé par la formule fondamentale du calcul des fréquences :

$$f(A + B) = f(A) + f(B) - f(AB)$$

Dans le second membre, les signes + et — ont leur signification habituelle du calcul numérique. Les vingt postulats de *L'Algèbre de la Logique* de Couturat, deviennent des théorèmes démontrables. Le Calcul logique est débarrassé de son axiomatique propre et enrichi d'une exactitude mathématique.

Mais il y a une pierre d'achoppement : c'est la causalité. Une analyse des faits ne peut être effectuée que si l'on connaît la relation de cause à effet. Couturat dit que dans l'implication l'antécédent est la cause de la conséquence. Il s'agit là de la *causa sufficiens* des scolastiques, inapplicable à l'analyse des faits car la cause d'un phénomène est toujours sa condition nécessaire, ce sans quoi il ne se produirait pas. Dans l'analyse des faits, c'est l'effet qui implique la cause et il faut écrire A > B pour « A produit B ». La causation est la relation inverse de l'implication. Il s'agit là d'un véritable redressement d'une notion qui était, selon l'expression de Marx, « sur la tête » !

A partir de ce redressement, le théorème de Bayes, relatif à la probabilité des causes, est démontrable quand on considère les probabilités *a priori* comme des estimations des fréquences dans une suite de faits, et la probabilité *a posteriori* comme une probabilité conditionnelle. Une bifurcation du calcul fréquentiel conduit, d'une part, au calcul des probabilités et à la logique inductive, et, d'autre part, à la dialectique des faits.

Dans nos exposés de 1950, 1951, 1952, comme dans la première version de la *Théorie analytique de la Dialectique*, la définition de la négation d'un fait n'est pas correctement explicitée. Nous y voyons bien que les négations de la cause et de l'effet se produisent dans la contraposition de l'effet et de la cause, et que c'est cela qui fait la loi d'action et de réaction qui domine la dialectique des faits, mais nous conservons, en outre, la négation abstraite de Hegel. C'est parce que nous sommes encore sous l'influence de la logique classique, qui confond, comme dans le système de Boole, la négation et l'absence.

Le « non » que l'on oppose à A ne signifie pas l'absence de A, mais son rejet. La négation implique l'absence de A. C'est le contraire de A. Non point un contraire déterminé mais un contraire quelconque exprimé globalement dans une disjonction dont les termes sont les contraires de A.

Voilà ce qu'il fallait expliquer dans une nouvelle version de la *Théorie analytique.* Il fallait changer les notations, car il y a une subtile distinction à faire entre le fait global A + B lorsque A et B sont contraires l'un de l'autre, et lorsque A et B sont les contraires d'un troisième terme dont ils sont ensemble la négation. Dans le premier cas, A + B est une véritable somme fréquentielle comme dans le jeu de pile ou face. Dans le second cas, c'est une disjonction que nous représentons par A v B (A ou B). La formule fondamentale

$$f(A + B) = f(A) + f(B) - f(AB)$$

devient

$$f(A \text{ v } B) = f(A) + f(B) - f(AB)$$

et on peut, sans ambiguïté, appliquer la loi de transposition des expressions fréquentielles dans le langage en supprimant le signe de fréquence :

$$A \text{ v } B = A + B - AB$$

La conséquence est immédiate. Si A et B sont contraires l'un de l'autre, AB = 0 et A v B = A + B ; c'est un fait global dont les termes se produisent en alternant, l'union des contraires dont Hegel dit, dans l'introduction à *La Science de la Logique* : « Le dialectique consiste à concevoir les contraires comme fondus en une unité ». Si l'alternative est permanente, A + B = 1. Alors A = 1 — B et l'un est toujours équivalent à l'absence de l'autre, qui est son complément. Un fait qui possède un complément est *bilatère* comme s'il avait deux faces dont l'une est présente quand l'autre est absente. Mais un fait est toujours défini dans un contexte, qui est une suite dans laquelle il n'est pas certain qu'il possède un complément. Il est alors *unilatère* dans cette suite. C'est aux faits unilatères que sont applicables le développement de la double négation, la synthèse d'une contradiction et toutes les inférences dialectiques.

Tel est le sens de la nouvelle version de la *Théorie analytique de la Dialectique.*

J. GORREN
Juin 1968

INTRODUCTION

« La Dialectique est la science des lois les plus générales de tout mouvement, aussi bien le mouvement dans la nature et aussi dans l'histoire humaine que le mouvement de la pensée... ».
« ... Il ne s'agit pas ici de défendre le point de vue de Hegel : que l'esprit, la pensée, l'idée sont l'essentiel et que le monde réel n'est que l'empreinte de l'idée. Nous sommes tous d'accord que ce sont les faits qui servent de point de départ ».

Frédéric Engels
(Ancienne préface à l'*Anti-Dühring*)

Un fait est ce qui se produit, ce qui arrive, ce qui a lieu. Des faits semblables sont définis et exprimés par un même énoncé : une phrase, une proposition, parfois un simple vocable.

Reconnaître des faits semblables est la première opération de l'analyse des faits et la condition primordiale de la connaissance.

En apparence, un fait peut être isolé. En réalité, les faits s'enchaînent et s'opposent les uns aux autres et c'est le langage qui les isole. De là, ces deux aspects du mouvement universel : les enchaînements et les oppositions. Et ces deux formes de l'analyse des faits : la Logique, qui met l'accent sur les enchaînements, et la Dialectique, qui voit le mouvement dans les oppositions et leurs dépassements.

Historiquement, la Logique, considérée d'abord comme la science de la pensée, est née de l'analyse du langage. L'homme qui pense se dédouble et se parle. Les idées sont des faits fictifs, ou des relations de faits, dont les expressions s'énoncent dans ce dialogue intérieur. Mais en même temps que le langage décrit le mouvement universel, il abolit le mouvement en immobilisant les choses dans les idées. On dit qu'un objet EST en mouvement pour dire qu'il se meut. Tout peut s'exprimer *en être* par le subterfuge verbal. La Logique est finalement cette tentative paradoxale de décrire l'enchaînement universel tel qu'il est. Elle connaît pourtant les oppositions dans leurs formes grammaticales. Mais on les considère comme des accidents qui troublent l'enchaînement et on les élimine par un Principe de Contradiction qui oppose l'être au non-être.

Tandis que la logique décrit les choses *en être*, la Dialectique les décrit *en devenir* dans des suites de termes :

A, puis B, puis C, ...

Un terme représente aussi bien un fait que l'expression qui lui correspond dans le langage. Deux faits semblables sont représentés par un même terme. Une suite de faits est réalisée par des choses qui se produisent successivement. Les faits émergent comme des sommets d'une réalité mouvante.

« Rien n'est, disait Héraclite, puisque tout devient ».

L'être n'est que le permanent temporaire dans le devenir. Le devenir a la plus grande extension. Pourtant tout peut être exprimé en être. C'est parce que l'être est intemporel dans les symboles du langage, tandis que le devenir est toujours temporel, même si le temps ne figure dans le discours que par un ordre de succession.

Historiquement, la dialectique est d'abord un dialogisme : l'art du dialogue. « Celui qui sait interroger et répondre, comment l'appellerons-nous, sinon dialecticien ? » (Platon, *Cratyle*). Ensuite, la dialectique procède par affirmations et négations comme la projection du dialogue intérieur de la pensée. C'est le mouvement des idées dans le discours.

Appartenant à la période empirique de la logique verbale, Hegel reconstruit la dialectique des idées dans le langage. Il dépasse la période empirique tout en conservant les imprécisions du langage usuel : de là cette forme torturée du style hégélien, paradoxale, souvent inintelligible à première lecture et dont le rationnel est étouffé par les ratiocinations d'une métaphysique idéaliste.

La dialectique des faits est, chez Marx, un redressement de la dialectique des idées : il y a d'abord l'activité pratique humaine, ensuite, le langage qui raconte les modes de cette activité, enfin, les concepts que le langage produit et qui apparaissent comme les créations de l'esprit quand on fait abstraction de l'activité pratique qui les précède.

Ce redressement produira la dialectique rationnelle qui embrasse le fait global des choses dans la réalité objective et doit se préciser au cours de son développement, car la connaissance des choses ne peut être atteinte dialectiquement que par approximations successives.

La dialectique marxienne est ainsi définie en tant que méthode. Mais pour établir la dialectique en tant que science du mouvement, comme la définit Frédéric Engels, le redressement de la dialectique hégélienne est insuffisant. Comme la logique moderne, la dialectique doit être soumise à la rigueur d'un algorithme. Cela nous fait penser évidemment, tout d'abord, au calcul logistique de Boole, dont on a fait l'Algèbre de la Logique. Mais Boole a fait la découverte du calcul logistique bivalent en étudiant ce qu'il considérait comme les lois de la pensée et qui n'est en réalité, comme chez Hegel, que l'analyse du langage.

Le langage est bilatéral en ce sens qu'à toute expression on peut faire correspondre une expression complémentaire qui est fausse si la première est vraie, et vraie si la première est fausse. Le langage énonce également le réel et le fictif, la présence et l'absence. Or, un fait réel ne peut être présent et absent que successivement dans une suite de faits. La ratiocination du verbalisme ne peut être dépassée que par l'analyse fréquentielle, dans laquelle un fait n'est bilatère que s'il possède dans cette suite un complément présent ou absent dans un terme, suivant que le fait y est absent ou présent. Un ensemble de faits bilatères est un système de Boole. C'est un cas spécial. Il faut donc, pour atteindre les lois les plus élémentaires de tout mouvement, établir d'abord, en dehors du système de Boole, le calcul fréquentiel de l'analyse des faits. C'est une théorie apodictique basée sur la connaissance des quatre opérations fondamentales du calcul numérique.

Hegel n'admettait pas l'introduction du calcul qui porte atteinte à la dignité de l'Idée. Au sujet des premiers essais du calcul syllogistique de Plouquet, il écrit ceci :

« Cette prétention de pouvoir, par le calcul, enseigner toute logique, même à des gens incultes, est le pire dont puisse se recommander une invention portant sur la manière de présenter cette science de la Logique ».

Cette position réactionnaire ferme la porte à la logique moderne et à la dialectique formelle. Pourtant, toute forme générale de raisonnement est un calcul dont la formulation algébrique est plus simple et plus exacte que le langage vulgaire, qui a été inventé à des fins pratiques par des « gens incultes ».

1. Le Calcul fréquentiel

1. 1 Séquences et fréquences.

Une *séquence* dans une suite de termes est une partie de la suite à partir d'un premier terme et jusqu'à un dernier. La *fréquence* d'un fait dans une séquence est le rapport du nombre de termes dans lesquels le fait se produit au nombre de termes de la séquence. Ainsi, dans la séquence A, B, A, C, D, A, le nombre des arrivées de A est 3 et sa fréquence est 3/6.

Deux faits sont *équivalents* dans une suite s'ils sont toujours également fréquents. Le vocable « toujours » signifie ici « dans toutes les séquences de la suite ». Si l'un se produit dans un terme, l'autre doit également s'y produire et on peut les substituer l'un à l'autre dans le calcul des fréquences. C'est un cas particulier de l'égalité, car deux choses sont égales dans un contexte si elles peuvent être substituées l'une à l'autre sans changer le sens du contexte. On écrit

$$A = B$$

pour « A égale B » et

$$A \neq B$$

pour « A est différent de B ».

Le passage de l'égalité :

$$\text{fréquence de A} = \text{fréquence de B}$$

à $A = B$ ne se justifie que si la première est permanente, c'est-à-dire lorsqu'elle se vérifie dans toutes les séquences. C'est un principe fondamental du calcul fréquentiel de supprimer le vocable de « fréquence » de toutes les relations permanentes. C'est ainsi qu'on écrira

$$A + B = C$$

si la somme des fréquences de A et de B est toujours égale à la fréquence de C.

Un fait est *nul* dans une suite de faits s'il ne s'y produit pas. Sa fréquence est nulle dans toutes les séquences et on écrit

$$A = 0 \quad \text{(A égale zéro)}$$

pour « A est nul ».

Un fait est permanent dans une suite s'il se produit dans tous les termes. Sa fréquence est égale à l'unité dans toutes les séquences et on écrit

$$A = 1 \quad \text{(A égale un)}$$

pour « A est permanent ».

La fréquence d'un fait est un nombre rationnel compris entre 0 et 1.

2 La conjonction.

Plusieurs faits sont en conjonction s'ils se produisent dans un même terme d'une suite. Pratiquement, cela signifie que deux faits sont en conjonction s'il est impossible de distinguer lequel des deux précède l'autre. Une conjonction dépend donc, d'une part, de la précision de l'observation, d'autre part, du niveau de l'échelle de description. La contraction d'une suite peut supprimer l'ordre de succession de certaines séquences et, réciproquement, la dilatation d'une suite peut introduire dans certaines conjonctions un ordre de succession. Ces opérations indiquent, dans le premier cas, un passage à une plus grande échelle et, dans le second cas, à une plus petite échelle.

Chaque échelle de description a sa forme de réalité.

Des faits en conjonction à un certain niveau peuvent ne plus être en conjonction à un niveau inférieur obtenu par la dilatation d'une suite. Ainsi, lorsqu'une grandeur d'état exige les mesures simultanées des éléments à un niveau inférieur, la grandeur d'état devient indéterminable. Cela donne naissance aux théories indéterministes.

L'indétermination provient d'un essai de description d'un phénomène à une échelle qui ne lui convient pas. L'indéterminisme est un attribut d'une théorie mais n'attribue aucune qualité à la nature des choses.

Notation. Dans une suite A, B, C, D, E, ... le couple noté « A, B » est une succession : A puis B. Si A et B sont en conjonction, nous écrivons AB sans signe de séparation, pour indiquer que l'ordre de succession est aboli, et on peut écrire alors AB = BA, pour exprimer que AB et BA sont un même fait. Par contraction de la suite A, B, C on obtient la conjonction

$$ABC = BAC = ACB = \text{etc}$$

La tautologie. Une tautologie est la conjonction de deux faits semblables : il pleut et il pleut.

De la suite A puis A, il résulte par contraction un seul fait A. Cela revient à poser

$$\underline{AA = A}$$

C'est le *Principe de Tautologie.*

La contraction de la séquence A, B, A donne

$$ABA = AAB = AB$$

Le nombre des arrivées d'un fait dans une séquence est le nombre de termes dans lequel le fait se produit après avoir réduit les tautologies dans chaque terme. Ainsi, dans la séquence

$$ABA,\ BC,\ BACA,\ BD,\ A$$

qui, en vertu du principe de tautologie, est équivalente à

$$AB,\ BC,\ BAC,\ BD,\ A$$

la fréquence de A est 3/5.

Le zéro et l'unité dans la conjonction.

$$\underline{X0 = 0} \quad \text{pour tout X}$$

car un fait ne se produit jamais en conjonction avec ce qui ne se produit pas.

Le zéro est l'élément absorbant de la conjonction :

$$AB0 = 0,\ A0B = 0$$

Si P est un fait permanent, la conjonction AP a toujours même fréquence que A. On a donc XP = X pour tout X. Et puisque P = 1, on aura

$$\underline{X1 = X} \quad \text{pour tout X}$$

L'unité est l'élément neutre de la conjonction.

$$AB1 = AB,\ A1B = AB$$

En résumé :

$$\underline{AA = A},\ \underline{A1 = A},\ \underline{A0 = 0},\ \underline{AB = BA}$$

te vglk. met Spencer-Brown

1. 3 Le déterminisme. remplacer par 3.1 Implication

Des faits en conjonction sont les *facteurs* de la conjonction.

Le Principe du Déterminisme s'énonce :

Un fait est déterminé par la conjonction de ses facteurs.

Une détermination est une égalité dont un membre définit l'autre. Dans l'égalité AB = C, c'est la conjonction de A et de B qui détermine C. Cela signifie que si, dans la même suite de faits, on avait AB = D, on aurait aussi C = D.

Le déterminisme est donc toujours relatif à l'échelle de description d'une suite de faits. Il n'y a indéterminisme que si l'on passe arbitrairement d'une suite à une autre.

Le passage d'un facteur au fait déterminé par la conjonction est une *causation* dans laquelle le facteur est la *cause* et le fait déterminé l'*effet*.

Soit, par exemple, la détermination

$$ABCD = E$$

Chacun des facteurs peut être pris pour cause dans une causation particulière. Prenons C pour cause. Alors les facteurs A, B, D sont les circonstances dans lesquelles la cause produit l'effet. Si on représente par X la conjonction des circonstances, la détermination est

$$CX = E$$

Le principe du déterminisme a pour corollaire : *une même cause, dans les mêmes circonstances, produit le même effet.*

La réciproque n'est pas vraie : une même cause peut produire le même effet dans des circonstances différentes. C'est ce qui arrive si CX = CY avec X = Y.

Par adjonction de C aux deux membres de CX = E, il vient CCX = CE, ce qui, après application du principe de tautologie, se réduit à CX = CE. On peut donc substituer CE à CX dans CX = E, ce qui donne

$$\boxed{CE = E}$$

C'est ce que nous appellerons *la relation de cause à effet.* (Il s'agit ici de la causalité immédiate. La causalité médiate ne peut être définie que dans un processus dialectique (4.8) et est irréductible à une notion logique).

1.4 L'absence.

Dans une suite de faits, le nombre de termes qui contiennent A est la somme des nombres de termes qui contiennent A avec B et A sans B. La fréquence de A est donc toujours égale à la somme des fréquences de AB et de « A sans B ». Si on représente « A sans B » par AsB, on a

$$A = AB + AsB$$

donc, aussi

$$AsB = A - AB$$

ce qui définit fréquentiellement AsB : la fréquence de ce fait est toujours égale à la différence des fréquences de A et de AB.

Dans le langage on considère AsB comme la conjonction du fait A et du fait fictif sB (sans B), que l'on exprime comme l'idée d'un fait et qui représente *l'absence de B.*

On a, pour tout X :

$$XsA = X - XA$$

donc, pour X = 1 :

$$1sA = 1 - 1A$$

Mais 1sA = sA et 1A = A, donc

$$sA = 1 - A$$

Le fait fictif est introduit ainsi comme un élément de calcul.

$$s1 = 1 - 1 = 0,\ s0 = 1 - 0 = 1,$$
$$ssA = 1 - (1 - A) = 1 - 1 + A = A,$$
$$AsA = A - AA = A - A = 0,$$
$$A + sA = A + 1 - A = 1 \text{ et } A = 1 - sA$$

En résumé :

(1) $\underline{s1 = 0},\ \underline{s0 = 1},\ \underline{ssA = A},\ \underline{AsA = 0},\ \underline{A + sA = 1}.$

De là, les développements de l'unité. On a d'abord 1 = A + sA. Puis, X = XB + XsB pour tout X, donc pour X = sA :

$$sA = BsA + sAsB, \qquad \text{d'où}$$

(2) $$\underline{1 = A + BsA + sAsB}$$

C'est le développement de l'unité pour deux faits A et B. Pour trois faits A, B, C, on aura

(3) $$1 = A + BsA + CsAsB + sAsBsC$$

1.5 La disjonction.

Un *fait global* est un ensemble de faits qui se produit lorsque l'un des éléments de l'ensemble se produit. L'expression d'un fait global est A ou B ou C ..., ce qui s'écrit :

$$A \vee B \vee C \vee \ldots$$

Je dis que

(4) $$A \vee B = 1 - sAsB$$

Soient, en effet, dans une séquence quelconque :

p = nombre de termes qui contiennent A ou B,
q = nombre de termes qui ne contiennent ni A ni B,
n = nombre de termes de la séquence

$$p + q = n,\ p = n - q,\ \frac{p}{n} = 1 - \frac{q}{n},$$

$\frac{p}{n}$ = fréquence de A v B,

$\frac{q}{n}$ = fréquence de sAsB, qui est « ni A ni B ».

On a donc :

fréquence de A v B = 1 — fréquence de sAsB

Et, puisque cette relation est satisfaite dans toutes les séquences:

$$A \vee B = 1 - sAsB$$

ce qui définit fréquentiellement la disjonction A v B.

On aura de même :

(5) $$A \vee B \vee C = 1 - sAsBsC$$

En vertu de (2) et de (3) :

$$A \vee B = 1 - sAsB = A + BsA$$
$$A \vee B \vee C = 1 - sAsBsC = A + BsA + CsAsB$$

Subst.

Donc

(6) $$A \vee B = A + BsA$$

(7) $$A \vee B \vee C = A + BsA + CsAsB$$

En tenant compte que BsA = A — AB, la formule (6) devient

(8) $$A \vee B = A + B - AB$$

D'autre part,

$$CsAsB = CsA - BCsA = C - AC - (BC - ABC)$$

(9) $$CsAsB = C - AC - BC + ABC$$

En vertu de (9), la formule (7) devient

(10) $$A \vee B \vee C = A + B + C - AB - AC - BC + ABC$$

Les formules (8) et (10), d'où les faits fictifs sont éliminés serviront à démontrer la plupart des propriétés de la disjonction.

Théorème 1 : $A \vee A = A$

Car, en vertu de (8) :

$$A \vee A = A + A - AA = A + A - A = A$$

Th. 2 : $A = A \vee AB$

Car $A \vee AB = A + AB - AAB = A + AB - AB = A$

C'est la *loi d'absorption* : dans une disjonction, un terme absorbe les autres termes dans lesquels il figure en facteur. Par exemple,

$$AB \vee ABC \vee ABD = AB$$

Th. 3 : $A \vee 1 = 1$

Car $A \vee 1 = A + 1 - A1 = A + 1 - A = 1$

L'unité est l'élément absorbant de la disjonction. Cette propriété résulte immédiatement de la définition du fait global. Car si un fait global se produit quand l'un des éléments de l'ensemble se produit, il est évident qu'il suffit que l'un de ces éléments soit permanent pour que le fait global soit permanent :

$$A \vee B \vee C \vee 1 = 1.$$

Th. 4 : $A \vee 0 = A$

Car $A \vee 0 = A + 0 - A0 = A$

Le zéro est l'élément neutre de la disjonction.

Th. 5 : $s(A \vee B) = sAsB$?

A v B = 1 - zAzB

Cela résulte de (4) :

$$A \vee B = 1 - sAsB = s(sAsB)$$
$$s(A \vee B) = ss(sAsB) = sAsB \quad (1)$$

Corollaire : $s(AB) = sA \vee sB$

Car $s(sA \vee sB) = ssAssB = AB$

Th. 6. *Loi d'association* : $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

En vertu de (6) → A v B = A + B~A

$(A \vee B) \vee C = (A \vee B) + Cs(A \vee B) = (A \vee B) + CsAsB$ (Th. 5)

Mais $A \vee B = A + B - AB$

et $CsAsB = C - AC - BC + ABC$ (9)

donc, en vertu de (10)

$$(A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$$

D'autre part,

$A \vee (B \vee C) = (B \vee C) \vee A = B \vee C \vee A = A \vee B \vee C$

car l'ordre des termes de la disjonction est indifférent.

Th. 7. *Loi de distribution* : $(A \vee B)\,C = AC \vee BC$

$A \vee B =$ A +

$$A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C = (A \vee B) + C - (A \vee B)C \quad (8)$$

donc $$(A \vee B)C = (A \vee B) + C - (A \vee B \vee C)$$

En remplaçant $A \vee B$ et $A \vee B \vee C$, dans le second membre, par leurs expressions (8) et (10), il vient

$$(A \vee B)C = AC + BC - ABC$$

ou $$(A \vee B)C = AC + BC - ACBC = A\cancel{C} \vee BC \quad (8)$$

Généralisations :

$$(A \vee B \vee C)D = AD \vee BD \vee CD$$

$$(A \vee B)(C \vee D) = A(C \vee D) \vee B(C \vee D) = AC \vee AD \vee BC \vee BD$$

On voit ainsi se développer le calcul fréquentiel dans une forme analogue au calcul algébrique et dans laquelle la disjonction et la conjonction correspondent à la somme et au produit. Mais le calcul fréquentiel est simplifié par les lois d'absorption et de tautologie qui n'existent pas dans le calcul algébrique.

Dans le calcul fréquentiel, le zéro a les mêmes fonctions que dans le calcul algébrique :

$$A0 = 0 \text{ et } A \vee 0 = A$$

Il en est de même pour l'unité dans la conjonction :

$$A1 = A$$

Mais il y a exception pour l'unité dans la disjonction puisque

$$A \vee 1 = 1$$

Th. 8. *Loi de composition* : $(A \vee B)(A \vee C) = A \vee BC$

En effet :

$$(A \vee B)(A \vee C) = A \vee AC \vee BA \vee BC$$

et, par absorption :

$$(A \vee B)(A \vee C) = A \vee BC$$

Généralisation :

$$(X \vee A)(X \vee B)(X \vee C) = X \vee ABC$$

Le passage du second membre au premier :

$$X \vee ABC = (X \vee A)(X \vee B)(X \vee C)$$

est une décomposition.

2. *Les Probabilités*

2.1

Une suite est *illimitée* si on ne lui connaît pas de dernier terme. Les problèmes de prévision se rapportent toujours à des suites illimitées.

La fréquence d'un fait ne peut être exactement connue que dans une séquence entièrement réalisée et n'est pas définie dans une suite illimitée. Mais s'il existe un procédé qui permet de lui attribuer une valeur dans une séquence non réalisée, cette estimation est la *probabilité* du fait. On a même donné le nom de probabilité subjective à un coefficient d'importance que l'opinion accorde à un fait en fonction des conditions dans lesquelles il se produit. La probabilité *objective* est calculée en tenant compte de ces conditions et en étendant les formules du calcul des fréquences au calcul des probabilités.

2.2 La probabilité statistique.

La longueur d'une séquence est le nombre de ses termes. Le nombre des arrivées d'un fait de fréquence f dans une séquence de longueur n est nf.

Une suite de séquences de longueurs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ a pour longueur $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Si $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont les fréquences d'un fait dans les séquences successives, le nombre de ses arrivées est

$$n_1f_1 + n_2f_2 + \ldots + n_kf_k$$

et la fréquence du fait dans la suite est :

$$\frac{n_1f_1 + n_2f_2 + \ldots + n_kf_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

C'est la moyenne des fréquences pondérée par les longueurs des séquences.

p m

x n

Cela posé, soit f la fréquence d'un fait dans une séquence de m termes, x la fréquence inconnue dans un prolongement de n termes. La probabilité dans une séquence de m + n termes est

$$\frac{mf + nx}{m + n} = p$$

d'où

$$f - p = \frac{n}{m}(p - x)$$

Le nombre m est indépendant de n et la différence $p - x$ est inférieure à l'unité en valeur absolue. Donc quand m est crois-

$\frac{mf + nx}{m+n} = p \rightarrow mf + nx = pm + pn \rightarrow mf - mp = pn -$

$m(f - p) = n(p - x) \rightarrow f - p = \frac{n}{m}(p - x)$

sant, la différence $f - p$ est décroissante en valeur absolue et il doit exister une valeur assez grande de m pour que la différence $f - p$ soit négligeable. Alors f est approximativement égal à p. De là, la définition de la probabilité statistique : c'est la fréquence d'un fait dans une séquence dont la longueur est la plus grande possible.

La probabilité statistique dans une suite de k séquences est (k étant le plus grand possible) :

$$\frac{n_1 f_1 + n_2 f_2 + \dots + n_k f_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = p$$

En particulier, si $p = 1$, on a :

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 + \dots + n_k f_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

et $n_1(1 - f_1) + n_2(1 - f_2) + \dots + n_k(1 - f_k) = 0.$

Aucun des termes de cette somme ne peut être négatif puisqu'une fréquence ne peut jamais surpasser l'unité. Il faut donc que tous les termes de la somme soient nuls, ce qui entraîne

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ \dots,\ f_k = 1$$

Le fait est donc permanent dans toutes les séquences de la suite.

Un fait dont la probabilité est égale à l'unité atteint le maximum de probabilité, qui définit la certitude empirique. Le passage de la certitude empirique à la certitude est une induction baconienne.

2.3 La probabilité totale.

Désignons par $p(X)$ la probabilité d'un fait X.

Le fait global « A ou B » étant déterminé par

$$A \vee B = A + B - AB$$

sa probabilité est

$$p(A) + p(B) - p(AB)$$

Nous dirons que les faits A et B sont *exclusifs* si $AB = 0$. Alors la probabilité de leur disjonction est la somme

$$p(A) + p(B)$$

Un ensemble de faits exclusifs est un ensemble dont l'un quelconque des éléments se produit à l'exclusion des autres : ils sont exclusifs deux à deux. La fréquence d'un fait global d'éléments exclusifs est la somme des fréquences de ses éléments. La probabilités d'un fait global de termes exclusifs est donc la somme des probabilités de ses termes. C'est le théorème de la probabilité totale.

2.4 La probabilité conditionnelle.

Nous entendons par fréquence relative de A par rapport à B la fréquence de A dans la suite des termes qui contiennent B.

Soient a et b les nombres d'arrivées de la conjonction AB et du fait B dans une séquence de n termes. La fréquence relative de A par rapport à B est le rapport a/b.

Désignons par $f(X)$ la fréquence d'un fait X et par $f(A/B)$ la fréquence relative de A par rapport à B. On aura

$$f(A/B) = \frac{a}{b} = \frac{a/n}{b/n} = \frac{f(AB)}{f(B)}$$

donc

$$f(A/B) = \frac{f(AB)}{f(B)}$$

Transposée dans le calcul des probabilités, cette formule devient

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}}$$

$p(A/B)$ s'énonce : probabilité de A si B. C'est la probabilité pour que A se produise si B se produit.

On dit que le fait global A se produit dans un ensemble B de cas possibles, si

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m$$
$$B = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m \vee \dots \vee A_n$$

Dans la conjonction AB le terme A absorbe les autres termes et on a $AB = A$, donc

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)}$$

Si B est un ensemble de cas exclusifs, on peut appliquer aux deux probabilités $p(A)$ et $p(B)$ le théorème de la probabilité totale. En désignant par p_k la probabilité d'un terme A_k, on aura :

$$p(A) = p_1 + p_2 + \dots + p_m$$
$$p(B) = p_1 + p_2 + \dots + p_m + \dots + p_n$$

et

$$p(A/B) = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m + \dots p_n}$$

et si les cas possibles sont également probables :

$$p_1 = p_2 = \dots = p_m = \dots = p_n$$

$$p(A/B) = \frac{mp_1}{np_1} = \frac{m}{n}$$

La probabilité d'un fait global qui se produit dans un ensemble de cas exclusifs également probables est le rapport du nombre de ces cas au nombre de cas possibles.

2.5 La probabilité mathématique.

oude versie → Kolmogorov

En vertu du théorème précédent, la probabilité d'un fait qui se produit dans un ensemble de cas exclusifs et également probables est un nombre bien déterminé.

On dit que deux faits sont « également possibles » si, étant définis dans les mêmes conditions, il est impossible de prévoir lequel sera le plus fréquent. La probabilité mathématique est calculée en considérant des faits également possibles comme également fréquents, donc également probables. C'est ainsi que la probabilité de tirer un roi d'un jeu de 32 cartes est 4/32.

2.6 La probabilité composée.

De la formule fondamentale

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$$

il résulte que

$$\underline{p(AB) = p(A/B)\,p(B)}$$

C'est le théorème de la probabilité composée : la probabilité de la conjonction de deux faits est le produit de la probabilité pour que l'un se produise si l'autre se produit par la probabilité de l'autre.

Généralisation :

$$p(ABC) = \frac{p(ABC)}{p(BC)}\,\frac{p(BC)}{p(C)}\,p\,(C),$$

donc

$$p(ABC) = p(A/BC)\,p(B/C)\,p(C)$$

2.7 Faits indépendants.

Le fait A est indépendant de B si $p(A/B) = p(A)$.

Alors la probabilité de la conjonction

$$p(AB) = p(A/B)\,p(B) = p(A)\,p(B)$$

est le produit des probabilités de A et de B. On a donc

$$p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)} = p(B)$$

et B est indépendant de A.

Plusieurs faits sont indépendants les uns des autres s'ils sont indépendants deux à deux et que chacun est indépendant des conjonctions des autres.

On a, d'une part,

$$p(ABC) = p(AB/C)\,p(B/C)\,p(C)$$

d'autre part, si A, B, C sont indépendants :

$$p(A/BC) = p(A), \quad p(B/C) = p(B),$$

donc

$$p(ABC) = p(A)\,p(B)\,p(C).$$

La probabilité de plusieurs faits indépendants est le produit des probabilités des faits.

2.8 Probabilités des causes (Théorème de Bayes).

A, B, C sont des causes possibles de l'effet E si la cause globale de E est A v B v C.

La relation de cause à effet (1.3) est ici

$$(A \vee B \vee C)\,E = E$$

d'où

$$E = AE \vee BE \vee CE$$

Si les causes possibles sont exclusives

$$p(E) = p(AE) + p(BE) + p(CE).$$

Quand E se produit, la probabilité pour que C soit la cause de E est

$$p(C/E) = \frac{p(CE)}{p(E)} = \frac{p(CE)}{p(AE) + p(BE) + p(CE)}$$

Mais

$$p(CE) = p(E/C)\,p(C)$$

donc

$$p(C/E) = \frac{p(E/C)\,p(C)}{p(E/A)\,p(A) + p(E/B)p(B) + p(E/C)p(C)}$$

C'est la formule de Bayes.

Les p(A), p(B), p(C) sont les probabilités *à priori*. Ce sont des estimations des fréquences des causes possibles, tandis que p(C/E) est la probabilité *a posteriori* de la cause C.

Si les causes A, B, C sont également possibles ***a priori***, **on a**

$$p(A) = p(B) = p(C)$$

et

$$p(C/E) = \frac{p(E/C)}{p(E/A) + p(E/B) + p(E/C)}$$

C'est la formule de Poisson.

3. *La Logique des Faits*

.1 L'implication.

Deux faits A et B sont enchaînés dans la suite

A, puis AB, puis B.

En général, ces trois termes établissent une continuité de A à B. Si la conjonction AB ne se produit pas, le passage de A à B est discontinu.

Deux cas spéciaux peuvent se produire :

1° $A = AB$, alors *A implique B.*

2° $AB = B$, alors *A produit B* (1.3).

Dans le cas de l'implication ($A = AB$), il suffit que A se produise. A est une *condition suffisante* de B. Mais B peut se produire sans que A ne se produise. A n'est donc jamais plus fréquent que B. Le vocable « jamais » signifie ici « dans aucune séquence de la suite des faits ». C'est pourquoi on écrit $A < B$ pour « A implique B ».

Dans une chaîne d'implications

$$A < B < C < D \ldots$$

chaque terme implique le suivant. On a donc :

$$A < B,\ B < C,\ C < D, \ldots$$

ou

$$A = AB,\ B = BC,\ C = CD, \text{ etc.}$$

On peut substituer BC à B dans $A = AB$, ce qui donne $A = ABC$. Ainsi, dans la chaîne d'implications $A < B < C < D$, on a :

$$A = ABCD,\ B = BCD,\ C = CD$$

et on peut dire que chaque terme est extrait du précédent. C'est dans ce sens qu'une suite d'implications est *déductive.*

.2 Les inférences.

Les expressions sont des formes du langage. Ce que le langage exprime, c'est d'abord l'expression d'un fait et ensuite des relations de faits ($A = B$, $A = 0$, $A = 1$, $A < B$). Le passage d'une relation à une autre est une inférence. L'inférence est déductive si la première relation est suffisante pour que la seconde soit implicitement exprimée. Démontrer une inférence, c'est rendre explicite ce qui est implicite. L'inférence déductive est, dans le langage qui expose la logique des faits, une implication de relations : on dit que la relation x *entraîne* la relation y s'il suffit d'exprimer x pour que y soit implicitement exprimée. On écrit

$$x \rightarrow y \quad (x \text{ entraîne } y)$$

Exemples : $0 = 0X \rightarrow 0 < X$ pour tout X

$X = X1 \rightarrow X < 1$ pour tout X

Remarquons que la double implication

$$0 < X < 1$$

rappelle que la fréquence de X est toujours comprise entre 0 et 1.

Théorème 1 : $A < B < C \rightarrow A < C.$

Car si $A = AB$ et que $B = BC$, on a $A = ABC$. Et puisque $A = AB$, on peut substituer A à AB dans $A = ABC$, et il vient $A = AC$.

Th. 2 : $A < B < A \rightarrow A = B$

Car si $A = AB$ et que $B = AB$, on a $A = B$.

Th. 3 : $1 < A \rightarrow A = 1$

Ce que le permanent implique est permanent.
Car $1 < A \rightarrow 1 = 1 = 1A \rightarrow 1 = A$.

Th. 4 : $A < 0 \rightarrow A = 0$

Ce qui implique zéro est nul.
Car $A < 0 \rightarrow A = A0 \rightarrow A = 0$.

Th. 5 : *Une conjonction implique chacun de ses facteurs.*

$ABC < A$ car $ABC = ABCA$

Th. 6 : *Les facteurs d'une conjonction permanente sont permanents.*

Car si $AB = 1$, on a $1 = AB < A \rightarrow 1 < A \rightarrow A = 1$.

Conclusion $AB = 1 \rightarrow A = B = 1$

$ABC = 1 \rightarrow A = B = C = 1.$

Th. 7 : *Une disjonction est impliquée par chacun de ses termes.*

$A = A \vee AB \rightarrow A = A(A \vee B) \rightarrow A < A \vee B.$

Remarquons que cela résulte immédiatement de la définition du fait global.

Corollaire : *Les termes d'une disjonction nulle sont nuls.*

$$A \vee B = 0 \rightarrow A < 0 \rightarrow A = 0$$

Conclusion : $A \vee B = 0 \rightarrow A = B = 0$

$$A \vee B \vee C = 0 \rightarrow A = B = C = 0.$$

Th. 8 : $\underline{A < B \rightarrow AX < BX}$

Car $A = AB \rightarrow AX = ABX \rightarrow AX = AXBX \rightarrow AX < BX$.

C'est le théorème de l'adjonction d'un même facteur aux deux membres d'une implication.

Th. 9 : $\underline{(A < B)(C < D) \rightarrow AC < BD}$

Le premier membre est l'association de deux implications :

$$A = AB \text{ et } C = CD$$

$$AC = ABCD = ACBD \rightarrow AC < BD$$

C'est le théorème de l'adjonction de deux implications membre à membre.

Th. 10 : $\underline{A < B \rightarrow A \vee X < B \vee X}$

$A = AB \rightarrow A \vee X = AB \vee X = (A \vee X)(B \vee X)$ par décomposition

$$A \vee X = (A \vee X)(B \vee X) \rightarrow A \vee X \rightarrow B \vee X$$

C'est le théorème de l'addition d'un même terme aux deux membres d'une implication.

Th. 11 : $\underline{(A < B)(C < D) \rightarrow A \vee C < B \vee D}$

Si $A = AB$ et que $C = CD$, on a

$A \vee C = AB \vee CD = (A \vee C)(A \vee D)(B \vee C)(B \vee D) < B \vee D$

C'est le théorème de l'addition de deux implications membre à membre.

Th. 12 : $\underline{A < B \rightarrow AsB = 0 \rightarrow A < B}$

Car	$A = AB + AsB$
Donc	$A = AB \rightarrow AsB = 0$
et réciproquement	$AsB = 0 \rightarrow A = AB$

Th. 13 : $\underline{A < B \rightarrow sB < sA \rightarrow A < B}$

$A = AB \rightarrow AsB = 0 \rightarrow sBs(sA) = 0 \rightarrow sB < sA$

Réciproquement :

$$sB < sA \rightarrow ssA < ssB \rightarrow A < B$$

3.3 L'équivalence logique.

Si x entraîne y et que y entraîne x, les relations **x** et **y** sont logiquement équivalentes. Nous écrirons $x \equiv y$.

Donc $(x \rightarrow y \rightarrow x) \rightarrow (x \equiv y)$

Exemples :

$$(A < B) \equiv (A = AB)$$

$$(A < B \rightarrow AsB = 0 \rightarrow A < B) \rightarrow (A < B \equiv AsB = 0)$$

$$A < B \rightarrow sB < sA \rightarrow A < B) \rightarrow (A < B \equiv sB < sA)$$

Soit à démontrer que

$$(AC = BC)(A \vee C = B \vee C) \equiv (A = B)$$

On a $A \vee C = B \vee C \rightarrow A + C - AC = B + C - BC \rightarrow A - AC = B - BC$

Donc si on a aussi $AC = BC$, il en résulte que $A = B$.

Conclusion :

$$(AC = BC)(A \vee C = B \vee C) \rightarrow A = B$$

Réciproquement :

$$A = B \rightarrow (AC = BC)(A \vee C = B \vee C)$$

car si on substitue A à B, le second membre devient

$$(AC = AC)(A \vee C = A \vee C)$$

Conclusion :

$$(AC = BC)(A \vee C = B \vee C) \equiv (A = B)$$

3.4 La causalité.

La relation de cause à effet (1.3) :

$$CE = E$$

montre que l'effet implique la cause : **E < C.**

C'est pourquoi nous écrivons :

$$C > E$$

pour « C produit E ».

La cause est une condition nécessaire de l'effet. Ce sans quoi l'effet ne se produirait pas. Mais C peut se produire sans que E ne se produise. La causation est la relation inverse de l'implication.

Exemples :

1. Il n'y a pas de fumée sans feu ($EsC = 0$).
   La fumée implique le feu ($E < C$).
   Le feu produit la fumée ($C > E$).
2. Si le courant circule, le circuit est fermé.
   La circulation du courant implique la fermeture du circuit.
   La fermeture du circuit produit la circulation du courant.

3. Si une force agit sur un mobile, le mouvement est accéléré.
L'accélération implique la force.
La force produit l'accélération.

L'équivalence de la causation à la forme causale de l'implica-tion obtenue par le renversement de l'ordre des termes est propre à la logique des faits.

Dans la logique des idées issue de l'analyse du langage usuel, il y a très souvent une équivoque qui confond les deux relations inverses. C'est parce que dans l'inférence déductive, ce qui est impliqué est la conséquence logique de ce qui implique, et il suffit de confondre la conséquence avec l'effet d'une cause pour créer la confusion. Celle-ci est aggravée par le fait que dans l'inférence verbale le vocable de passage est toujours *donc* : il pleut, donc il tombe de l'eau ; il tombe de l'eau, donc il pleut.

Une chaîne causale dans laquelle chaque terme produit le suivant est de la forme

$$A > B > C > D \ldots$$

Et on a successivement

$$AB = B,\ ABC = C,\ ABCD = D, \ldots$$

La compréhension des termes est croissante, tandis que leur fréquence est décroissante et la chaîne finit par s'éteindre, sauf si un terme se répète.

Par exemple, si $A > B > C > A$, on a $A = B = C$. C'est un automatisme.

Ce sont les chaînes mixtes de la forme

$$A > B < C$$

qui provoquent les sophismes de fausse causation, très fréquents dans les développements historiques. On dira, par exemple, « A produit B et B implique C, donc A produit C ». Le sophisme est souvent masqué par une surabondance verbale. Tout ce que l'on peut dire, c'est que

$$A > B < C \rightarrow AC > B$$

« Le pavé glissant produit la chute du piéton, et la chute implique la pesanteur ». Conclusion : C'est la conjonction du pavé glissant et de la pesanteur qui produit la chute.

4. *La dialectique des faits*

4.1 Oppositions et contradictions.

Il y a trois espèces d'oppositions : la contrariété, la subcontrariété et la complémentarité.

A est le *contraire* de B si A implique l'absence de B.

A est le *subcontraire* de B si A produit l'absence de B.

Enfin A est le *complément* de B si A est équivalent à l'absence de B.

Les expressions de la présence et de l'absence sont contradictoires. Leur conjonction (AsA) est une contradiction.

Si A est le contraire de B, la conjonction AB implique une contradiction, car

$$A < sB \rightarrow AB < BsB$$

Si A est le subcontraire de B, la conjonction AB produit une contradiction, car

$$A > sB \rightarrow AB > BsB$$

Enfin, si A est le complément de B, la conjonction AB est une contradiction, car

$$A = sB \rightarrow AB = BsB$$

La somme fréquentielle de deux faits complémentaires est permanente :

$$A = sB \rightarrow A = 1 - B \rightarrow A + B = 1$$

Réciproquement :

$$A + B = 1 \rightarrow A = 1 - B \rightarrow A = sB$$

4.2 Les contraires.

La contrariété est réciproque :

$$A < sB \rightarrow ssB < sA \rightarrow B < sA$$

Deux faits contraires sont exclusifs :

$$A < sB \rightarrow AB < BsB < 0 \rightarrow AB = 0 \qquad \text{(3.2. Th. 4)}$$

Réciproquement, deux faits exclusifs sont contraires l'un de l'autre :

$$(AB = 0)\ (A = AB + AsB) \rightarrow A = AsB \rightarrow A < sA$$

Conclusion :

$$(A < sB) \equiv (B < sA) \equiv (AB = 0)$$

Enfin,

$$(A \vee B = A + B - AB)\ (AB = 0) \rightarrow A \vee B = A + B$$

La disjonction de deux faits contraires est donc égale à leur somme fréquentielle.

4.3 Les subcontraires.

La subcontrariété est réciproque.

$$A > sB \rightarrow ssB > sA \rightarrow B > sA$$

Deux faits subcontraires l'un de l'autre sont *alternatifs*, c'est-à-dire que leur disjonction est permanente :

$$A > sB \rightarrow A \vee B > B \vee sB \rightarrow A \vee B > 1 \rightarrow A \vee B = 1$$

Réciproquement, deux faits alternatifs sont subcontraires l'un de l'autre :

$$A \vee B = 1 \rightarrow AsB \vee BsB = sB \rightarrow AsB = sB \rightarrow A > sB$$

Conclusion :

$$\underline{(A > sB) \equiv (B > sA) \equiv (A \vee B = 1)}$$

Il est remarquable que si deux faits sont alternatifs et que l'un ne se produit pas dans un terme, l'autre s'y produit nécessairement :

$$A \vee B = 1 \rightarrow A > sB \rightarrow B > sA$$

donc $A \vee B = 1 \rightarrow (sA < B)\,(sB < A)$

4.4 La complémentarité.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux faits A et B soient complémentaires est

$$\underline{A + B = 1}$$

car $(A + B = 1) \equiv (A = 1 - B) \equiv (B = 1 - A)$

donc $A = sB$ et $B = sA$

Deux faits exclusifs et alternatifs sont complémentaires :

$$A \vee B = A + B - AB$$

donc $(A \vee B = 1)\,(AB = 0) \rightarrow A + B = 1$

Réciproquement, deux faits complémentaires sont exclusifs et alternatifs :

$$A + B = 1 \rightarrow A = 1 - B \rightarrow A = sB \rightarrow AB = 0$$

$$(A + B = 1)\,(AB = 0) \rightarrow A \vee B = A + B = 1$$

Deux faits complémentaires d'un même troisième sont équivalents : car si $A + B = 1$ et que $A + C = 1$, on a $B = 1 - A$ et $C = 1 - A$, donc $B = C$. On dit, pour abréger, qu'un fait ne peut avoir qu'un seul complément. Mais il n'est pas évident qu'il possède un complément, c'est-à-dire, un fait réel qui soit équivalent au fait fictif de son absence. Un fait qui n'a pas de complément dans une suite est *unilatère* dans cette suite. Un fait qui possède un complément est *bilatère*.

Un ensemble de faits bilatères est un système de Boole.

4.5 La négation.

La négation d'un fait est la disjonction de ses contraires. C'est un fait global qui se produit toutes les fois qu'un contraire se produit : *le contraire implique la négation.* La négation produit le contraire.

Nous indiquerons par NA (non-A) la négation de A, et parNNA la négation de la négation.

Théorème 1 : *La négation implique l'absence.*

Si B, C, D, ... sont des contraires de A, on a :

$$B < sA,\ C < sA,\ D < sA, \ldots$$

$$B \vee C \vee D \vee \ldots < sA$$

Mais $NA = B \vee C \vee D \vee \ldots$

donc $\underline{NA < sA}$

Th. 2 : *Un fait et sa négation sont exclusifs* :

$$NA < sA \rightarrow ANA < AsA \rightarrow ANA < 0 \rightarrow ANA = 0$$

$$\underline{ANA = 0}$$

Th. 3 : $\underline{A < B \rightarrow NB < NA}$

Par adjonction de NB aux deux membres de $A < B$:

$$A < B \rightarrow ANB < BNB \rightarrow ANB < 0 \rightarrow ANB = 0$$

NB est donc un contraire de A et, puisque le contraire implique la négation, on a $NB < NA$.

Th. 4 : *Tout fait implique la négation de sa négation.*

Car A est un contraire de NA, donc A doit impliquer la négation de NA :

$$ANA = 0 \rightarrow A < NNA$$

Théorème des trois positions.

Posons $NNA = N^2A$, $NN^2A = N^3A$, etc.

On a, par contraposition :

$$A < N^2A \rightarrow N^3A < NA$$

D'autre part, en vertu du Th. 4 :

$$NA < N^3A$$

Conclusion : $NA < N^3A < NA \rightarrow N^3A = NA.$

C'est le théorème des trois positions.

La suite

$$\underline{A,\ NA,\ N^2A,\ N^3A, \ldots}$$

dont chaque terme, à partir du deuxième, est la négation du précédent, n'a que trois termes distincts :

$$\underline{A,\ NA,\ NNA}$$

Ce sont les trois positions du fait A.

Il est à remarquer que

$$\underline{A \vee NA \vee NNA = NA \vee NNA}$$

Car $A < NNA \rightarrow A = ANNA$, et, par conséquent, NNA absorbe A (car $A \vee NA \vee NNA = ANNA \vee NA \vee NNA$).

Si A est bilatère, soit $A' = sA$ son complément.

$$NA < sA \rightarrow NA < A'$$

D'autre part A' est un contraire de A, donc $A' < NA$.

Conclusion :

$$NA < A' < NA \rightarrow A' = NA$$

Le complément d'un fait bilatère est équivalent à sa négation.

Mais A est le complément de A', donc $NA' = A$ et $NNA = A$:

Un fait bilatère est équivalent à la négation de sa négation.

Corollaire : un fait bilatère n'a que deux positions : A et $NA = sA$.

4.6 Action et réaction.

Dans une chaîne causale, la cause produit l'effet et l'effet devient la cause d'un autre effet. En réalité il arrive qu'un fait rencontre son contraire qui implique la négation de la cause. Cette négation devient cause d'une réaction. On a alors, par contraposition :

$$\underline{A > B \rightarrow NB > NA}$$

Si une cause produit un effet, la négation de l'effet produit la négation de la cause.

C'est la *loi d'action et de réaction.*

Loi universelle, souveraine dans la nature, dans l'histoire, dans la pensée : tout est action et réaction. Je peux marcher sur le sol solide, parce que le sol réagit à mon action ; je peux écrire sur cette feuille, parce que la feuille réagit à la poussée du stylo.

Il peut se produire que par la durée ou la répétition, l'action et la réaction soient simultanées. Alors, par adjonction membre à membre :

$$(A > B)\ (NB > NA) \rightarrow ANB > BNA$$

Mais

$$NA < NB \rightarrow NA = NANB \rightarrow BNA = BNBNA = 0$$

La conjonction des effets de l'action et de la réaction est alors nulle et on dit qu'il y a équilibre entre l'action et la réaction.

Le meilleur exemple est la loi de Newton d'action et de réaction des forces mécaniques.

La vie, du point de vue biologique, « est un équilibre qui permet que les réactions puissent indéfiniment se continuer et même laisser éventuellement un acquis bénéficiaire qui se traduira dans une croissance ou une multiplication ». (P. Rijlant, *Eléments de Physiologie psychologique*).

Puisque $BNA = 0$, l'acquis bénéficiaire est un facteur de la conjonction ANB des causes de l'action et de la réaction.

4. 7 La réduction de la réaction.

Dans l'inférence d'action et de réaction

$$A > B \rightarrow NB > NA$$

le langage fait souvent omission de la partie entre crochets de l'expression :

$$A > [B \rightarrow NB] > NA$$

et exprime l'expression réduite

$$A > \underline{>} NA$$

dont nous dirons que A produit ensuite NA.

La partie omise n'est pas toujours une réticence car il se peut qu'elle soit inconnue.

4. 8 La causalité médiate.

La conséquence médiate d'un fait A est l'effet de NA dans la relation :

$$A > > NA > C$$

A est alors la cause médiate de C.

Il ne faut pas dire que la cause médiate est la cause de la cause. Une conséquence médiate résulte toujours d'une réaction et n'implique pas la cause, car $> > NA > C$ est la forme réduite de

$$A > B \rightarrow NB > NA > C$$

4. 9 Développement de la double négation.

La triade de la double négation

$$A > > NA > > NNA$$

est la réduction du développement

$$A > B \rightarrow NB > NA > C \rightarrow NC > NNA$$

lorsque le processus réactif se prolonge au delà de la conséquence médiate.

Puisque $A < NNA$, il peut se produire que

$$A >> NA >> NNA > A$$

La triade reproduit alors la cause initiale.

C'est ainsi que dans le langage la double négation reproduit l'affirmation initiale et peut donner l'illusion qu'elle lui est équivalente.

5. *Le processus dialectique*

5. 1 Le négatif.

A et B sont subcontraires l'un de l'autre si

$$A > sB \rightarrow sB < A \rightarrow sA < B$$

L'absence de l'un implique la présence de l'autre.

Quand un fait ne se produit pas dans un terme d'une suite, tous ses subcontraires s'y produisent dans une conjonction qui est le négatif du fait.

Il résulte de cette définition que la négation implique le négatif. Car, si on représente par A' le négatif de A, on a

$$NA < sA < A' \rightarrow NA < A'$$

Théorème 1 : *Un fait et son négatif sont alternatifs.*

Car $sA < A'$, donc A et A' sont subcontraires l'un de l'autre.

Ils sont donc alternatifs (4.3), et on a

$$\underline{A \vee A' = 1}$$

Corollaire : A et B étant deux faits quelconques, on a

$$\underline{A = AB \vee AB'}$$

Car $B \vee B' = 1 \rightarrow A = A\ (B \vee B') = AB \vee AB'$

En présence d'un troisième fait C, on aura

$$A = ABC \vee ABC' \vee AB'C \vee AB'C'$$

et ainsi de suite. C'est le principe de classification dichotomique.

Développement de l'unité :

$$1 = A \vee A' = AB \vee AB' \vee A'B \vee A'B' = \text{etc.}$$

Th. 2 : $\underline{AB' = 0 \rightarrow A < B}$

$$(AB' = 0)\ (A = AB \vee AB') \rightarrow A = AB \rightarrow A < B$$

Th. 3 : $\underline{AB'C' = 0 \rightarrow A < B \vee C}$

$$AB'C' = 0 \rightarrow AB' < C \rightarrow AB \vee AB' < AB \vee C$$

dont $AB'C' = 0 \rightarrow A < (A \vee C)\ (B \vee C) < B \vee C$

Généralisation : $AB'C'D' = 0 \rightarrow A < B \vee C \vee D.$

Th. 4 : $\underline{A < B \rightarrow B' < A'}$

Par addition de A' aux deux membres de $A < B$, il vient

$$A < B \rightarrow A \vee A' < B \vee A' \rightarrow 1 < B \vee A' \rightarrow B \vee A' = 1$$

B et A' étant alternatifs sont subcontraires, donc le négatif de B doit impliquer A'.

Th. 5 : $\underline{N(A \vee B) \rightarrow A'B'}$

Car $N(A \vee B) < s(A \vee B) = sAsB < A'B'$

Généralisation : $N(A \vee B \vee C) < A'B'C'$

Th. 6 : $\underline{N(AB) < A' \vee B'}$

$$N(AB) < s(AB) = sA \vee sB < A' \vee B'$$

Généralisation : $N(ABC) < A' \vee B' \vee C'$

5. 2 Le négatif du négatif.

Si A est bilatère et que B est son complément, on a

$$sA = B \rightarrow B < A'$$

D'autre part, le complément est un subcontraire et, puisque le négatif est la conjonction des subcontraires, $A' < B$.

Conclusion :

$$sA = B \rightarrow B < A' < B \rightarrow A' = B$$

Le négatif d'un fait bilatère est son complément.

Donc si A est bilatère : $A' = sA = NA \rightarrow AA' = 0$.

Réciproquement, si un fait et son négatif sont exclusifs, on a $(AA' = 0)\ (A \vee A' = 1)\ (A \vee A' = A + A' - AA') \rightarrow A + A' = 1$

Alors A et A' sont complémentaires.

Si A est unilatère, $AA' \neq 0$, c'est-à-dire qu'un fait et son négatif peuvent se produire simultanément.

Si A' ne se produit pas, c'est A'', le négatif du négatif, qui se produit, et on a :

$$\underline{A' \vee A'' = 1} \text{ et } \underline{NA' < A''}$$

Théorème 1 : *Le négatif du négatif d'un fait implique le fait.*

Car $A \vee A' = 1$. Le fait et son négatif sont alternatifs, donc A est un subcontraire de A'. Et puisque le négatif implique tout subcontraire, on a $A'' < A$.

De là il résulte que $A'' = A''A$.

Donc $\quad A \vee A' \vee A'' = A \vee A' \vee A''A$

et, par absorption,

$$A \vee A' \vee A'' = A \vee A'$$

De là, aussi $AB \vee AB' \vee AB'' = AB \vee AB' = A$.

Th. 2. : *La suite A, A', A'', A''' ... dont chaque terme est suivi de son négatif, n'a que trois termes distincts A, A', A''.*

Car $A''' < A'$, en vertu du Th. 1.

D'autre part, par contraposition :

$$A'' < A \rightarrow A' < A'''$$

Conclusion : $\quad A' < A''' < A' \rightarrow A''' = A'$.

5. 3 La spirale de Lafargue.

Il résulte du théorème précédent qu'un fait se répète généralement dans des circonstances nouvelles.

D'abord A se produit, puis, lorsque A ne se produit plus, c'est A' qui se produit dans des circonstances B, c'est-à-dire dans une conjonction A'B. Ensuite, si A' et B ne se produisent plus, c'est A'' et B' qui se produisent dans une conjonction A''B'C et, puisque $A'' = A''A$, le fait A reparaît dans AA''B'C.

Ensuite, on a successivement :

A'BB''C'D,

AA''B'CC''D'E,

A'BB''C'DD''E'F, etc.

C'est ce qui fait dire à Lafargue que la figure du développement historique n'est pas une ligne droite mais une spirale qui va en s'élargissant : « et l'on voit alors reparaître des formes antérieures que l'on croyait éteintes à jamais ; mais elles ne reparaissent que profondément modifiées par la succession ininterrompue des phénomènes économiques et sociaux qui se sont produits dans le cours du mouvement ».

5. 4 La synthèse d'une contradiction.

Les exclusifs A et B se produisent dans le fait global A + B, (la somme des contraires, 3.2).

Si le fait global est permanent, A et B sont complémentaires et l'un d'eux se produit toujours. Si le fait global n'est pas permanent, il arrive que A et B ne se produisent plus. Alors, la conjonction A'B' des négatifs se produit et on dit que l'opposition des contraires est dépassée par cette conjonction A'B' que l'on appelle *la synthèse* de la contradiction que la conjonction AB implique.

Or $\quad A < sB < B' \rightarrow A < B'$

$$B < sA < A' \rightarrow B < A'$$

On peut donc dire que *des faits exclusifs impliquent les facteurs de la synthèse de leur contradiction.*

En dialectique, on donne le nom de *thèse* à celui des termes exclusifs qui se présente le premier. Alors l'autre est l'*antithèse.*

La formation de la synthèse se présente suivant le schéma :

$$\left.\begin{array}{l}\textit{La thèse} < \text{le négatif de l'antithèse}\\ \textit{L'antithèse} < \text{le négatif de la thèse}\end{array}\right\}\ \textit{Synthèse}$$

* * *

5. 5 Un processus dialectique est une suite de phases qui contiennent chacune les synthèses des contradictions de la phase précédente. Les contradictions d'une phase sont dépassées par leurs synthèses dans la phase suivante. C'est une loi d'évolution : chaque phase prend naissance dans les oppositions de la phase précédente. La loi d'évolution dialectique apporte la solution de ce paradoxe que l'évolution se fait malgré et en conséquence de ses contradictions. C'est en cela que le processus dialectique diffère de l'enchaînement logique, qui exclut les contradictions.

Il se peut qu'une opposition se produise sans être suffisante pour provoquer une modification observable, mais que l'accumulation d'oppositions donne naissance à un paramètre, facteur quantitatif susceptible d'être évalué. On constate alors que le paramètre ne dépasse pas un certain niveau au delà duquel il ne saurait croître sans que l'objet ne subisse un changement qualitatif. Ce changement apparaît comme un saut brusque, un bond dans le processus.

L'exemple classique est celui du changement d'état de la matière. Dans le passage de l'état solide à l'état liquide, le paramètre est la température qui mesure l'accumulation des oppositions du conflit moléculaire interne. La température monte jusqu'à un point de fusion auquel le solide se liquéfie.

Les passages successifs de la matière à l'état organisé, à l'état vivant, à l'état sensible, à l'état conscient, sont des bonds successifs dans une longue accumulation d'oppositions.

La dialectique marxiste explique l'évolution sociale par la croissance des forces productives, qui engendrent deux fonctions sociales : la production et l'accumulation des richesses. Ces fonctions doivent se compléter, se combiner dans l'organisation sociale. Or, les forces productives ne résultent pas de l'organisation, mais au contraire, ce sont les forces productives qui produisent les matériaux nécessaires à l'organisation. Faute d'organisation initiale, les fonctions créent séparément leurs organes, qui sont les classes sociales. La production élargie, qui produit la croissance de la base matérielle de la société, n'est possible que par le sacrifice d'une grande masse de travailleurs au profit de privilégiés qui s'emparent du surproduit. Ce surproduit résulte du surtravail provoqué par divers modes d'exploitation. Ici le paramètre est le niveau atteint par les forces productives qui sont croissantes dans les pays économiquement développés. Mais, tandis que les forces de production sont croissantes par l'effet du progrès technique, la forme de propriété est un élément conservateur, puisqu'elle tend à immobiliser les privilèges de la classe possédante. A chaque niveau des forces productives correspond une forme de propriété. Il arrive fatalement que les forces productives dépassent les cadres de la forme de propriété. Le conflit qui oppose la production à la forme d'accumulation surgit concrètement entre les classes sociales, qui sont les organes des fonctions en lutte, et produit les bonds du processus dialectique durant cette longue période que nous vivons encore et qu'Engels appelle « l'ère de la fatalité ».

6. *La dialectique rationnelle*

La loi d'action et de réaction (4.6) est fondamentale et universelle.

Les hommes agissent sur le monde et réagissent aux actions extérieures comme toutes les choses agissent et réagissent les unes aux autres. Lorsqu'ils racontent les épisodes de cette activité, c'est dans des processus de même forme. Et finalement, c'est dans un développement ainsi transposé par le langage que les philosophes découvrent ce qu'ils appellent les lois de la pensée. Mais il y a d'abord l'activité pratique humaine, ensuite le langage qui raconte cette activité, enfin les concepts que le langage produit et que l'on considère comme des créations de l'esprit.

Le langage est un phénomène social qui prend naissance dans les gestes des primitifs et se perfectionne au cours du développement historique de la vie sociale. Il coordonne l'activité humaine dans la mesure où la transposition est exacte, c'est-à-dire où la correspondance entre les faits et les signes du langage est parfaite.

L'idée est d'abord le signe qui accompagne le fait et ensuite l'image du fait qui se fixe dans la mémoire. L'idée transpose le réel dans le rationnel et aboutit au concept qu'elle extrapole vers l'expression de faits fictifs. La pensée est le dialogue intérieur par lequel l'homme se dédouble et se parle.

C'est dans la vie active que l'homme connaît le monde et se reconnaît en lui. Il rencontre d'abord la réalité sensible. Puis il étend son champ d'action par le perfectionnement des moyens de production et d'investigation. Lorsque son action est de plus en plus efficace, sa connaissance du monde est faite d'approximations successives et de contradictions qu'il dépasse successivement. C'est pourquoi la dialectique des idées, phénomène parmi les phénomènes, a la forme du mouvement universel.

Les philosophes ont extrait de l'analyse du langage la première approximation de la logique classique, bivalente et bilatérale.

La logique classique est la période empirique d'une science dont le moyen d'investigation et d'expression est le langage vulgaire. Et lorsque l'homme commence à penser scientifiquement, il ne peut saisir que les premières apparences des choses, comme le langage les exprime. Or, le langage usuel exprime les choses *en être*, comme si tout se produisait dans un terme d'une suite : ce qui se meut EST en mouvement ; ce qui vit EST en vie, etc. Dans un terme d'une suite, un fait ne peut être que présent ou absent. Sa fréquence ne peut avoir que les valeurs 1 ou 0 et l'expression d'un fait X est vraie ou fausse suivant que $X = 1$ ou que $X = 0$. Cela crée l'*illusion ontologique* qui immobilise les propositions et les concepts dans un système de Boole. En outre, le langage exprime également le réel et le fictif. A toute expression on peut faire correspondre une expression complémentaire qui ratifie l'illusion ontologique.

Les logiciens qui ont aperçu cette confusion ont tenté de remplacer la complémentarité par une règle plus générale introduisant une logique multivalente. Cela permet de justifier toutes les extravagances du langage. C'est un jeu dont il s'agit d'observer les règles mais qui n'est valable que dans la logique formelle des propositions. Pour écarter cette confusion de l'analyse des faits, il faut remonter aux règles rigoureuses du calcul fréquentiel.

Tandis que la logique exprime les choses *en être* dans l'ensemble idéal des choses qui se produisent, se sont produites et se produiront, la dialectique les exprime *en devenir* dans des suites de faits et les dépassements successifs des contradictions. Car, tandis que la logique exclut les contradictions, la dialectique les dépasse. Ce sont deux moments, deux aspects, de la discipline de la pensée. Le dépassement des contradictions fait le mouvement des idées.

Pour immobiliser le mouvement dans l'illusion ontologique, les logiciens ont inventé le verbalisme de la logique des classes et de la théorie des ensembles. Pour exprimer, par exemple, qu'une porte est ouverte ou fermée, on imagine qu'il y a deux classes, deux espèces de portes : les portes ouvertes et les portes fermées. Une porte est un élément de la réunion des ensembles des portes ouvertes et des portes fermées. La dialectique ignore ce verbalisme surabondant, car c'est la même porte qui est successivement ouverte et fermée.

La pensée est le mouvement des idées réglé comme la succession des faits par les lois du calcul fréquentiel qui est, en dernière analyse, l'algèbre de la dialectique.

Ce calcul est le fond de tout raisonnement, le plus souvent sous-entendu dans le langage qui n'exprime que les résultats. Cela est évident pour les inférences déductives en vertu des théorèmes de la logique des faits. Quant aux inférences inductives, elles ne font qu'appliquer aux probabilités ce qui est vrai des fréquences. Prenons un exemple bien précis : « Tout homme est mortel ». C'est un fait certain. Pourquoi est-il certain ?

Désignons par x le nombre des humains qui ont existé depuis l'origine de l'humanité, et par n le nombre des humains qui vivent actuellement. La fréquence de la mortalité est

$$\frac{x - n}{x} = 1 - \frac{n}{x}$$

Le nombre x est inconnu, mais nous savons qu'il est tellement grand que, dans l'évaluation de la fréquence, le rapport de n à x est négligeable. L'estimation de la fréquence est une probabilité. La probabilité de la mortalité est donc $p = 1$, ce qui est le signe de la certitude empirique.

La position fréquentiste que nous adoptons ici n'est pas seulement une méthode d'exposition ; c'est le fondement épistémologique de la dialectique formelle.

Un fait est d'autant mieux connu qu'il est plus fréquent. Un fait qui ne se serait produit qu'une seule fois en dehors de tout développement ne saurait être connu parce qu'il ne saurait être reconnu. Il n'y aurait pas de mots pour le définir et pas d'idée pour y penser. La répétition fait l'habitude et l'habituel fait le rationnel.

Dès la définition de la conjonction (1.2), nous savons que chaque ordre de grandeur a sa forme de réalité. L'échelle de description est toujours définie par un fait-type de signification précise dans un contexte. Par exemple, l'échelle *macroscopique* est définie par le fait que les corps matériels sont limités par des surfaces. Et c'est parce que l'on peut parler d'une surface sans rien dire du corps qu'elle enveloppe, que le langage produit le concept de surface géométrique. Et c'est parce que l'on peut parler de la longueur sans rien dire de la largeur que le langage produit le

concept de la longueur sans largeur, qui est une ligne. selon Euclide. Chaque démonstration des premiers théorèmes de la géométrie élémentaire est la répétition verbale d'une expérience racontée dans une terminologie spécialement inventée à cet effet.

La connaissance immédiate de l'espace se limite à une région dans laquelle s'effectuent les expériences simples. La limite d'une telle région est indéterminée et cette indétermination permet d'étendre les notions fondamentales vers le concept de l'espace infini. L'infini est le refuge de l'inaccessible. Le concept de l'espace infini, admis sans discussion dans le système des anciens, est remis en question lorsque le développement de la gravifique d'Einstein permet de décrire le monde à l'échelle cosmique. De ce point de vue ultra-macroscopique qui prétend embrasser tout l'univers, il n'y a plus d'infini, et la métrique euclidienne doit être abandonnée au profit de la métrique sphérique de Riemann.

A l'échelle *microscopique*, les surfaces limitantes deviennent indécises pour disparaître à l'échelle microphysique des corpuscules.

Riemann écrivait en 1854 :

« Il semble bien que les concepts métriques sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept de corps solide et celui de rayon lumineux, cessent de subsister dans l'infiniment petit. Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes à la Géométrie ». (*Hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*). Les prévisions de Riemann se vérifient.

A l'échelle microphysique, le monde n'est pas semblable à l'univers cosmique et c'est là un obstacle sérieux à l'élaboration d'une théorie de l'infiniment petit physique. Cela n'empêche nullement le mathématicien de parler de l'infiniment petit analytique en considérant toute grandeur définie à l'échelle macroscopique comme la somme des parties infiniment petites. Ce langage est légitime quand il ne fait que traduire les procédés du calcul intégral. Mais c'est un langage inspiré par la forme de la réalité à l'échelle macroscopique.

C'est ainsi que le langage construit verbalement un monde idéal qui se transforme à mesure que la réalité est mieux connue.

Dans la suite des idées, le vrai peut devenir faux, le faux peut devenir vrai ; il arrive que le vrai et le faux se rencontrent dans une conjonction qui implique une contradiction dont le dépassement est une inférence dialectique. La dialectique des faits est applicable aux termes qui les représentent dans le discours, dans le dialogue, dans la pensée, et cela constitue la dialectique rationnelle. La synthèse d'une contradiction est la conjonction des négatifs des termes exclusifs. C'est la conjonction de ce que les contraires impliquent selon le schéma (5.4) :

La thèse → le négatif de l'antithèse
L'antithèse → le négatif de la thèse } Synthèse

La logique classique ignore cela parce que tous ses termes sont bilatères. Le négatif se confond alors avec le complément et la synthèse reproduit la contradiction dans le système étriqué de Boole.

C'est généralement l'inférence par double négation qui engendre la gradation des concepts.

Prenons, à titre d'exemple, le concept de *nombre*.

Le nombre naturel est d'abord adjectif numéral et résulte de la pratique de l'énumération, laquelle engendre les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique.

L'opération de la division provoque, historiquement, la première négation. On dit d'abord que quatre n'est pas divisible par trois. Ensuite, on nie cette négation en disant que le rapport de quatre à trois est le nombre rationnel quatre tiers, et on découvre que le nombre rationnel est le rapport de deux grandeurs commensurables entre elles. Puis on découvre qu'il existe des grandeurs de même espèce qui n'ont pas de rapport rationnel parce qu'elles sont incommensurables, notamment le rapport de la diagonale au côté d'un carré. On nie cette négation en définissant le nombre irrationnel.

Ensuite, toujours dans l'ordre historique, on définit le nombre négatif par la négation de la négation d'une soustraction impossible et on constate que l'un des nombres $x - y$ et $y - x$ est le négatif de l'autre.

Enfin, la double négation de la racine carrée impossible d'un nombre négatif définit le nombre complexe.

Ce processus, dont l'exposé ne demande que quelques lignes d'écriture est le résumé d'une histoire séculaire dont chaque épisode fut un conflit qui opposa l'esprit conservateur au progrès de la pensée et de l'activité scientifique.

Dans l'antiquité grecque, la découverte des nombres irrationnels provoqua l'indignation des pythagoriciens. Au début de la Renaissance, ce fut l'introduction des nombres négatifs, découverts par les Hindous, transmis par les Arabes, et que les Occidentaux qualifièrent de nombres absurdes. De nos jours encore, les nombres complexes sont qualifiés d'imaginaires, comme si leur mode d'existence était différent de celui des nombres réels.

D'où vient ce préjugé que la Mathématique est une science purement déductive ?

L'ancienneté de cette science permet de l'enseigner à l'envers en ne considérant que ses périodes de démonstrations déductives à partir des idées acquises et réunies dans des axiomatiques comme

des principes immuables. Aujourd'hui, en mathématique dite « moderne », ces principes sont soumis au verbalisme d'une logique bivalente, la logique des classes transformée en théorie des ensembles. Et si un mathématicien s'avisait d'affirmer que tout concept n'est qu'une création du langage et qu'il peut être dépassé par sa double négation, il rencontrerait la même indignation que celle qui opposa les pythagoriciens et les médiévaux aux préjugés de l'époque.

Au début du vingtième siècle, une contradiction fondamentale opposait les lois du mouvement des phénomènes électromagnétiques aux lois du mouvement de la mécanique rationnelle. Ces lois s'expriment par des groupes de transformations coordonnées du mobile dans l'espace et le temps. Dans le groupe de Lorentz, relatif aux phénomènes électromagnétiques, les coordonnées x, y, z, t sont définies dans chaque système de référence, tandis que dans le groupe de transformations de la mécanique rationnelle, seules les coordonnées spatiales x, y, z sont relatives au système de référence, tandis que la coordonnée temporelle t est un invariant, le temps absolu. Le préjugé du temps absolu dominait la science depuis toujours. Aussi, Lorentz affirma-t-il que la variable t qui figurait dans ses équations n'était pas le temps réel mais un temps fictif, qu'il appela le temps local. Einstein a nié cette négation en affirmant que le temps local est le temps réel, relatif au système de référence et indiqué par nos horloges quand on prend la terre comme solide de référence. Cette affirmation est justifiée par le fait que les horloges sont réglées dans le monde entre les observatoires horaires par des émissions d'ondes électromagnétiques dont la vitesse est considérée comme constante dans toutes les directions indépendamment de la vitesse de la terre dans l'espace. Et il suffit de postuler l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide pour obtenir le groupe de Lorentz valable dans les translations rectilignes uniformes et conforme au critère de l'expérience au niveau de la relativité restreinte.

Le grand mérite d'Einstein est d'avoir osé dépasser le préjugé du temps absolu par une double négation.

Bertrand Russel, dans la préface du livre de Jean Nicod sur *Le Problème de l'Induction*, dit que ce problème est le scandale de la théorie de la connaissance. Il raconte qu'au cours d'une conversation avec Albert Einstein, il voulut lui faire admettre que la découverte de la Relativité est le résultat d'une induction. Einstein ne voulut jamais l'admettre et Russel raconte qu'il ne comprit pas les explications du célèbre théoricien. Sa découverte apparaissait comme une espèce de jaillissement spontané.

Ce que Russel appelle le scandale de la théorie de la connaissance n'est autre chose que l'ignorance du rôle de l'inférence dialectique. La double négation, sans être reconnue comme telle par ceux qui la pratiquent, est d'un usage courant dans toutes les sciences. Dans les théories déductives elle fournit les éléments des axiomatiques.

Hegel, dans *La Science de la Logique* et Engels dans *L'Anti-Dühring*, attachent une attention spéciale au processus qui aboutit à la notion de différentielle en analyse mathématique. Dans les applications du calcul à la physique aussi bien qu'à la mécanique et à l'astronomie, la différentielle d'une fonction est la valeur approchée de la différence des valeurs de la fonction lorsqu'on donne aux variables indépendantes des accroissements assez petits pour pouvoir négliger les différences d'ordre supérieur (différences de différences). Engels a montré comment l'approximation ainsi obtenue devient valeur exacte dans un changement de l'ordre de grandeur. Mais c'est dans un autre sens que cette notion a été précisée par les mathématiciens. On a d'abord démontré que la différence et la différentielle deviennent des infiniment petits équivalents lorsque l'accroissement de la variable indépendante devient nul. Cela signifie que le rapport de la différence à la différentielle devient égal à l'unité. C'est ici que l'inférence est dialectique. Car lorsque les accroissements sont nuls, la différence aussi bien que la différentielle sont nulles et leur rapport prend la forme illusoire : zéro sur zéro. C'est la négation du rapport. Alors on nie cette négation en définissant la *vraie valeur* du rapport : c'est ce que *devient* le rapport lorsque ses deux termes deviennent nuls et non ce qu'il *est* lorsque ses termes sont nuls.

Certes, l'analyse mathématique a une forme naïve dans sa dialectique originelle. Mais c'est grâce à cela qu'elle existe et c'est comme cela qu'elle est appliquée.

Pour sortir de cette simplicité primitive, les logiciens ont remplacé les suites illimitées des valeurs d'une variable par des ensembles infinis dont les éléments sont figés dans une éternelle immobilité et dont les propriétés paradoxales sont prises pour vérités fondamentales. C'est la négation du réel. L'avenir de la mathématique est dans la négation de cette négation.

Jean GORREN
(*Bruxelles*)